المعادلات التفاضلية

مثال: شكل المعادلة التفاضلية التي تقبل الدالة: $y = cx + c - c^2$

$y' = c \longrightarrow y = xy' + y' - y'^2$

شكل المعادلة التفاضلية التي تقبل الدالة

$$y = c_1 x + \frac{c_2}{x} + c_3$$

$$y' = c_1 - \frac{x c_2}{x^2}$$

$$y''(2) = 2\frac{c_2}{x^3} \quad , \quad y'''(3) = -6\frac{c_2}{x^4}$$

$$y''' + \frac{3}{x} y'' = 0$$

مثال: شكل المعادلة التفاضلية التي تقبل كل:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

$$y'' = c_1 \cos x - c_2 \sin x$$

$$y'' + y = 0$$

مثال: تأكد من أن الدالة $y = cx + \frac{1}{c}$

1- الحل العام للمعادلة التفاضلية $y = xy' + \frac{1}{y'}$

2- ثم تحقق من أن $y^2 = 4x$ هو حل خاص للمعادلة التفاضلية

$y' = c \longrightarrow y = xy' + \frac{1}{y'}$

$2y \cdot y' = 4 \longrightarrow y' = \frac{2}{y}$

نعوض بالمعادلة:

$$y = \frac{y^2}{4} \cdot \frac{2}{y} + \frac{y}{2}$$

$y = \frac{y}{2} + \frac{y}{2}$: نعوض في المعادلة ونبدأ بالبحث عن الحلول بفرض أن

مثال: أوجد مرتبة ودرجة كل من المعادلة:

$y'' + xy' - 2x = 0$ مرتبة 2 ودرجة 1

$y''' + xy^4 - 2y'' = 0$ مرتبة 3 ودرجة 1

* حل المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى *

المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات المفصولة.

$$p(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$$

مثال:

$$\cos^2 y\,dx - \sin^2 x\,dy = 0$$

نقسم على $\sin^2 x \cdot \cos^2 y$

نضرب الطرفين (-)

$$-\frac{dx}{\sin^2 x} + \frac{dy}{\cos^2 y} = 0$$

$$\cot x + \tan y = C$$

مثال:

$$x(y^2-1)\,dx + y(x^2-1)\,dy = 0$$

نقسم على المثال ونضرب (2):

$$\frac{2x}{x^2-1}\,dx + \frac{2y}{y^2-1}\,dy = 0$$

$$\ln(x^2-1) + \ln(y^2-1) = \ln C$$

$$\ln[(x^2-1)(y^2-1)] = \ln C$$

$$(x^2-1)(y^2-1) = C$$

مثال:

$$x \cdot \cos\frac{y}{x}\,\frac{dy}{dx} = y\cos\frac{y}{x} - x$$

نقسم على x ونضرب

$$\cos\frac{y}{x}\,dy = \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\,dx$$

نفرض: $z = \frac{y}{x} \leftarrow y = xz$

$$dy = x\,dz + z\,dx$$

$$\cos z(x\,dz + z\,dx) = z\cos z\,dx - dx\,x\cos z\,dz + z\cos z\,dx =$$

$$z\cos z\,dx - dx\cos z\,dz = -\frac{dx}{x}$$

$$\sin z = -\ln x + \ln C$$

$$\sin\frac{y}{x} = \ln\frac{C}{x}$$

$$\frac{C}{x} = e^{\sin\frac{y}{x}} \rightarrow C = x\cdot e^{\sin\frac{y}{x}}$$

- المعادلات التفاضلية التي ترد إلى معادلات تفاضلية متجانسة:

المتجانسة: هي المعادلة التي نستطيع كتابتها على الشكل: $g\left(\frac{y}{x}\right)$

المعادلات على الشكل:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

حالة 1: $c_1 = c_2 = 0$

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right)$$

نتبعان بمرافقة المبدأ:

$$y' = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{y}{x}}{a_2 + b_2\frac{y}{x}}\right)$$

حالة 2: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ نعطي معادلة متجانسة تكون على الشكل: $y' = f(x)$

مثال: حل المعادلة التفاضلية:

$$y = \frac{3x + 5y + 2}{6x - 10y + 4}\,dx \qquad dy$$

$$\frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{2}{4}$$

$$y' = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \longrightarrow dy = \frac{1}{2}dx$$

$$y = \frac{1}{2}x + C$$

حالة 3: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ نعطي معادلة متجانسة:

مثال:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{4x + 2y + 1}{2x + 2y + 2}$$

نفرض أن $z = x + 2y \longrightarrow y = z - 2x$

$$dy = dz - zdx$$

$$dz - zdx = \frac{2z + 1}{z + 2}\,dx$$

$$dz = \underbrace{\frac{2z + 1}{z + 2}}_{(1)}\,dx + \underbrace{\frac{2}{(z + 2)}}_{1}\,dx$$

$$dz = \frac{2z + 1 + 2z + 4}{z + 2}\,dx$$

$$dz = \frac{4z + 5}{z + 2}\,dx$$

↓ تكامل

$$\frac{z+2}{4z+5}\,dz = dx$$

نضرب طرفي المعادلة (4):

$$\frac{4z+8}{4z+5}\,dz = 4\,dx$$

$$dz + \frac{3}{4z+5}\,dz = 4\,dx$$

$$dz + \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{4z+5}\,dz = 4\,dx$$

$$z + \frac{3}{4}\ln(4z+5) = 4x + C$$

$$2x+y + \frac{3}{4}\ln(8x+4y+5) = 4x + C$$

الحالة 4:

نعلم ← $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ المستقيمان متقاطعان

مثال: حل المعادلة التفاضلية:

$$(2x+y-1)\,dy = (4x-y+7)\,dx$$

$\frac{2}{4} \neq \frac{1}{-1}$ المستقيمان متقاطعان

$M(\alpha,\beta)$

نوجد نقطة التقاطع

$$\begin{cases} 2x+y=1 & (\alpha) \\ 4x-y=7 & (\beta) \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1,\ \beta = -3$$

$M(-1,3)$

نفرض $x = X + \alpha$ ، $y = Y + \beta$

$x = X - 1 \longrightarrow dx = dX$

$y = Y + 3 \longrightarrow dy = dY$

$$(2X - 2 + Y + 3 - 1)\,dY = 4X - 4 - Y - 3 + 7\,dX$$

$$(2X + Y)\,dY = (4X - Y)\,dX$$

$$\left(2 + \frac{Y}{X}\right)dY = \left(4 - \frac{Y}{X}\right)dX$$

انتهت المحاضرة